第46講　総合問題(6)

1　$x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^2(|t^2-2xt|+xt)dt$ により定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$0<x\leqq 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=4x+k$ が異なる2点で交わるように，定数 k の値の範囲を定めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　原点をOとし，円 $x^2+y^2=1$ 上の点Pから x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をH，線分PHを2：1に内分する点をQとし，$\angle\mathrm{POH}=\theta$ とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　点Qの座標を θ で表せ．

(2)　$\angle\mathrm{QOH}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とおくとき，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を θ で表せ．

(3)　θ が変化するとき，β が最大となる θ の値を求めよ．

[2]　(1)　$\log_{10}3$ は無理数であることを示せ．

(2)　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3)　3^{26} の桁数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1] 次の ☐ に当てはまる整数を答えよ．

(1) 方程式 $x^2-2x-1=0$ の 2 つの解を α，β とすれば $\alpha+\beta=$ **ア**，$\alpha\beta=-$ **イ** である．

(2) $a=$ **ウエ**，$b=-$ **オカ** のとき x の整式 $P(x)=ax^5+bx^4+1$ は x^2-2x-1 で割り切れる．

[2] 実数 a，b を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつ．1 つの虚数解を α とすると，他の解は $2\alpha-4+3i$ と表すことができる．このとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位とする．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　総合問題(6)

［1］　関数 $f(x)=\int_0^x (t+2-|t^2-4|)dt$ は，

$0 \leqq x <$ ア のとき $f(x)=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}x^3+\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}x^2-$ カ x となる．

また，$x>0$ の範囲で，$f(x)$ は $x=$ キ のとき最大値 $\dfrac{\text{クケ}}{\text{コ}}$ をとる．

［2］　整数の組 $(p,\ q)$ のうち，実数係数の 2 次方程式 $x^2-2px+13=0$ の解の 1 つが $p+qi$ であるような組 $(p,\ q)$ は全部で サ 個ある．ただし，i は虚数単位とする．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　総合問題(6)

1　$x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^2(|t^2-2xt|+xt)dt$ により定めるとき，以下の問いに答えよ.

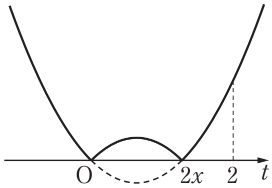
(1)　$0<x\leqq 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=4x+k$ が異なる2点で交わるように，定数 k の値の範囲を定めよ.

(1)　$|t^2-2xt|=|t(t-2x)|$

$0<x\leqq 1$ のとき　$0<2x\leqq 2$ より



$$\boldsymbol{f(x)}=\int_0^2(|t^2-2xt|+xt)dt$$

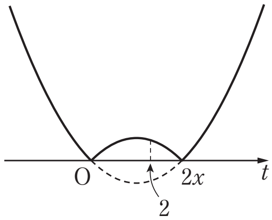
$$=\int_0^{2x}\{-t(t-2x)+xt\}dt+\int_{2x}^2\{t(t-2x)+xt\}dt$$

$$=\int_0^{2x}(-t^2+3xt)dt+\int_{2x}^2(t^2-xt)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3x}{2}t^2\right]_0^{2x}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x}{2}t^2\right]_{2x}^2$$

$$=-\frac{8}{3}x^3+6x^3+\frac{8}{3}-2x-\left(\frac{8}{3}x^3-2x^3\right)=\boldsymbol{\frac{8}{3}x^3-2x+\frac{8}{3}}$$

(2)　$x>1$ のとき　$2x>2$ より



$$f(x)=\int_0^2\{-t(t-2x)+xt\}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3x}{2}t^2\right]_0^2=6x-\frac{8}{3}$$

$0<x<1$ のとき

(1)より $f'(x)=8x^2-2=2(2x+1)(2x-1)$

また，$x>1$ のとき　$f(x)$ は単調増加する.

よって $x>0$ における $f(x)$ の増減は右表.

したがって

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$		↘		↗		↗

$f(x)$ は $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ のとき最小値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{2}$ をとる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$f(x)=4x+k$　より　$f(x)-4x=k$

$g(x)=f(x)-4x$ とおくと，$f(x)$ と $y=4x+k$ が異なる 2 点で交わるのは，

$y=g(x)$ と直線 $y=k$ が $x>0$ において異なる 2 点で交わるときである．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{3}x^3-6x+\dfrac{8}{3} & (0<x\leqq 1)\\[2mm] 2x-\dfrac{8}{3} & (x>1)\end{cases}$$

$0<x<1$ のとき　$g'(x)=2(4x^2-3)$

よって $x>0$ における $g(x)$ の増減は右表．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	$\left(\dfrac{8}{3}\right)$	↘	$\dfrac{8}{3}-2\sqrt{3}$	↗		↗

したがって，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}-2\sqrt{3}<k<\dfrac{8}{3}}$

---

2 ［1］　原点を O とし，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を H，線分 PH を 2：1 に内分する点を Q とし，$\angle\mathrm{POH}=\theta$ とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

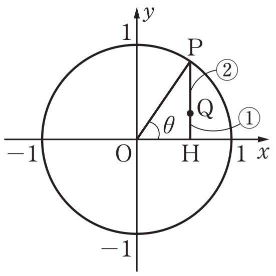
(1)　点 Q の座標を θ で表せ．

(2)　$\angle\mathrm{QOH}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とおくとき，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を θ で表せ．

(3)　θ が変化するとき，β が最大となる θ の値を求めよ．

---

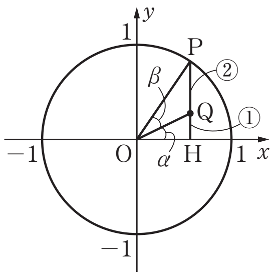
(1)　$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{3}\sin\theta\right)}$



(2)　$\boldsymbol{\tan\alpha}=\dfrac{\mathrm{QH}}{\mathrm{OH}}=\dfrac{\frac{1}{3}\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\tan\theta}$

$\boldsymbol{\tan\beta}=\tan(\theta-\alpha)=\dfrac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}$

$$=\dfrac{\frac{2}{3}\tan\theta}{1+\frac{1}{3}\tan^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2\tan\theta}{3+\tan^2\theta}}$$



(3)　$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より，β が最大になるのは $\tan\beta$ が最大になるとき，つまり $\dfrac{1}{\tan\beta}$ が最小となるときである．

$\tan\theta>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) の関係から

$$\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\tan^2\theta+3}{\tan\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\tan\theta+\dfrac{3}{\tan\theta}\right)\geqq\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\tan\theta\cdot\dfrac{3}{\tan\theta}}=\sqrt{3}$$

等号成立は　$\tan\theta=\dfrac{3}{\tan\theta}$　　$\tan^2\theta=3$　　$\tan\theta=\sqrt{3}$　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

したがって β が最大となる θ の値は　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ (1) $\log_{10}3$ は無理数であることを示せ.

(2) $\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ.

(3) 3^{26} の桁数を求めよ.

(1) $\log_{10}3$ が有理数とすると, $\log_{10}3=\dfrac{m}{n}$ (m, n は互いに素な自然数) とおける.

このとき　$10^{\frac{m}{n}}=3$　より　$10^m=3^n$

m, n が自然数より　左辺は偶数, 右辺は奇数

よって, これを満たす自然数 m, n は存在せず矛盾する.

したがって　$\log_{10}3$ は無理数である

(2) $\dfrac{6}{13}<\log_{10}3$　$\Leftrightarrow$　$6<13\log_{10}3$　$\Leftrightarrow$　$6<\log_{10}3^{13}$　$\Leftrightarrow$　$10^6<3^{13}$

$3^{13}=1594323$, $10^6=1000000$ より　$10^6<3^{13}$　　よって　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3$

$\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$　$\Leftrightarrow$　$\log_{10}9<1$　$\Leftrightarrow$　$9<10$　これは成立　　よって　$\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$

以上より　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$

(3) $\log_{10}3^{26}=26\log_{10}3$

$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$　より　$12<26\log_{10}3<13$

つまり　$12<\log_{10}3^{26}<13$　より　$10^{12}<3^{26}<10^{13}$

したがって　3^{26} は **13 桁**である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 次の □ に当てはまる整数を答えよ．

(1) 方程式 $x^2-2x-1=0$ の 2 つの解を α，β とすれば　$\alpha+\beta=$ ア ，

$\alpha\beta=-$ イ である．

(2) $a=$ ウエ ，$b=-$ オカ のとき x の整式 $P(x)=ax^5+bx^4+1$ は

x^2-2x-1 で割り切れる．

(1) $x^2-2x-1=0$ の 2 解が α，β であることより，解と係数の関係から

$\boldsymbol{\alpha+\beta=2}$，$\boldsymbol{\alpha\beta=-1}$

(2) α は $x^2-2x-1=0$ の解であることより　$\alpha^2-2\alpha-1=0$　つまり　$\alpha^2=2\alpha+1$

$\alpha^4=(2\alpha+1)^2=4\alpha^2+4\alpha+1=4(2\alpha+1)+4\alpha+1=12\alpha+5$

$\alpha^5=\alpha\cdot\alpha^4=\alpha(12\alpha+5)=12\alpha^2+5\alpha=12(2\alpha+1)+5\alpha=29\alpha+12$

同様に　$\beta^4=12\beta+5$，$\beta^5=29\beta+12$

$P(x)$ が $x^2-2x-1=0$ で割り切れるとき

$P(x)=ax^5+bx^4+1=(x^2-2x-1)Q(x)$　とおける．

$P(\alpha)=a\alpha^5+b\alpha^4+1=0$　より　$a(29\alpha+12)+b(12\alpha+5)+1=0$

つまり　$(29a+12b)\alpha+12a+5b+1=0$　……①

同様に　$(29a+12b)\beta+12a+5b+1=0$　……②

①－②より　$(29a+12b)(\alpha-\beta)=0$　　$\alpha\neq\beta$ より　$29a+12b=0$　……③

このとき①より　$12a+5b+1=0$　……④

③，④より　$\boldsymbol{a=12}$，$\boldsymbol{b=-29}$

3 ［2］ 実数 a，b を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつ．1 つの虚数解を α とすると，他の解は $2\alpha-4+3i$ と表すことができる．このとき，a，b の値を求めよ．ただし i は虚数単位とする．

実数係数の 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の 1 つ α を，$\alpha=p+qi$（p，q は実数）とおくと，もう 1 つの解は $p-qi$ となる．

また，$2\alpha-4+3i=2(p+qi)-4+3i=(2p-4)+(2q+3)i$

p，q は実数より　$p=2p-4$，$-q=2q+3$　　よって　$p=4$，$q=-1$

よって 2 解は $4\pm i$ である．

解と係数の関係より　$(4+i)+(4-i)=-a$，$(4+i)(4-i)=b$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-8}$，$\boldsymbol{b=17}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　総合問題(6)

[1]　関数 $f(x)=\int_0^x (t+2-|t^2-4|)dt$ は，

$0\leqq x<$ ア のとき $f(x)=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}x^3+\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}x^2-$ カ x となる．

また，$x>0$ の範囲で，$f(x)$ は $x=$ キ のとき最大値 $\dfrac{\text{クケ}}{\text{コ}}$ をとる．

[2]　整数の組 $(p,\ q)$ のうち，実数係数の 2 次方程式 $x^2-2px+13=0$ の解の 1 つが $p+qi$ であるような組 $(p,\ q)$ は全部で サ 個ある．ただし，i は虚数単位とする．

解答例

[1]　$t+2-|t^2-4|=\begin{cases} t+2-(t^2-4)=-t^2+t+6 & (t\leqq -2,\ 2\leqq t) \\ t+2-(-t^2+4)=t^2+t-2 & (-2\leqq t\leqq 2)\end{cases}$

よって　$0\leqq x<\mathbf{2}$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (t^2+t-2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^x=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x^3+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x^2-\mathbf{2}x$$

$x\geqq 2$ のとき　$f(x)=\int_0^2 (t^2+t-2)dt+\int_2^x (-t^2+t+6)dt$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+6t\right]_2^x$$

$$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x-\frac{32}{3}$$

$$f'(x)=\begin{cases} x^2+x-2=(x+2)(x-1) & (0\leqq x<2) \\ -x^2+x+6=-(x+2)(x-3) & (x\geqq 2)\end{cases}$$

よって　$f(x)$ の増減表は右図．

したがって　$x=\mathbf{3}$ で最大値 $\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{6}}$ をとる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{7}{6}$	↗	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{17}{6}$	↘

[2]　実数係数の方程式 $x^2-2px+13=0$ の解の 1 つが $p+qi$ であるとき，もう 1 つの解は $p-qi$ である．

よって解と係数の関係より　$(p+qi)(p-qi)=13$　　$p^2+q^2=13$

これを満たす整数の組 $(p,\ q)$ は，$p<q$ のとき

$(p,\ q)=(2,\ 3),\ (2,\ -3),\ (-2,\ 3),\ (-2,\ -3)$ の 4 組

$p>q$ のときも同様に 4 組．したがって求める個数は **8** 個

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。